

ارزیابی کارایی واحد های تصمیم گیرنده با مدل های تک مرحله ای و محدودیت های وزنی

سارا فناطی رشیدی

گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

چکیده

در متون مربوط به تحلیل پوششی داده معمولاً از مدل های مضرری استفاده می کنند که کران های پایین و بسیار کوچک (به لحاظ نظری فوق العاده کوچک) را به وزن های ورودی و خروجی اختصاص می دهند. مشکلات محاسباتی که در جریان حل این برنامه ها ظهور می کنند، شناخته شده و معلوم هستند. مشخص شده است که جواب های عملی مدل های DEA تک مرحله ای با یک ϵ فوق العاده کوچک می تواند منجر به عدم دقت های محاسباتی غیر قابل پذیرش گردد. (سیفورد ۱۹۹۳). پودونوسکی ۲۰۰۷ نشان می دهد که این مدل ها می توانند از طریق روش دو مرحله ایسیفورد وهمکاران حل شوند که در آن، مرحله دوم نیاز به اصلاح دارد. در این پژوهش، یک مسئله تئوری مورد شناسایی و بررسی قرار می گیرد که زمانی به وقوع می پیوندد که این کران ها در مدل مضرری با محدودیت های وزنی مورد استفاده قرار گیرند. نشان می دهیم که کران های پایینی کوچک می توانند منجر به شناسایی یک هدف کارا با ورودی های منفی شوند و یک مدل اصلاح شده را بیان می کنیم که بر این مسئله فائق آید.

واژگان کلیدی: کارایی - کنترل وزن - ورودی منفی - مدل تک مرحله ای

مقدمه

تحلیل پوششی داده ها، یک روش برنامه ریزی خطی است که اولین بار توسط چارلز و همکاران در سال ۱۹۷۸ مطرح شد [۲۶]. در این روش برای سنجش کارایی واحد های تصمیم گیرنده با چندین ورودی و چندین خروجی یک مدل برنامه ریزی خطی (CCR) ارائه گردید. در ارزیابی عینی عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده مشکلی در ارتباط با نحوه کار مدل مضریمی وجود دارد که معمولاً برای حل مسائل و تخصیص کران های بالا و پایین بسیار کوچک به وزن های ورودی و خروجی استفاده می شود که کوچک بودن این کران ها باعث بروز مشکلات محاسباتی می شود. دلیل این امر این است که در الگوهای استاندارد تحلیل پوششی داده ها مقادیر ورودی و خروجی شعاعی واحدهای تصمیم گیرنده (DMUها) معمولاً ضعیف هستند و از کارایی قدرتمندی برخوردار نیستند. (کوپر، سیفورد و تون (۲۰۰۷) و تاناسولیس، پوزنلا و دسپیک (۲۰۰۸)) پس هدف های کارآمدی نمی توانند باشند. برای شناسایی اهداف کارآمد می توان از بیشینه سازی ورودی ها و خروجی ها به عنوان یک هدف ثانویه کمک گرفت. ما در اینجا نحوه-ی بهینه سازی مؤلفه ها و فاکتور بهبود شعاعی را هم در یک مرحله و هم در مراحل جداگانه بهینه سازی مورد بررسی قرار می دهیم.

مدل های DEA تک مرحله ای با محدودیت های وزنی

در رویکرد تک مرحله مدل DEA مضریمی یک کران پایین بسیار کوچک ϵ به مؤلفه های ورودی و خروجی اختصاص می دهیم. به طور معادل مدل پوششی دوگان طوری اصلاح می شود که مؤلفه های ورودی و خروجی را بصورت ضرب در ϵ ارائه می دهد. هدف ما از این کار این است که بتوانیم بهره وری شعاعی ورودی و خروجی های مرتبط با یک DMU را با در نظر گرفتن همزمان ناکارایی های محتمل به عنوان هدف ثانویه ارزیابی کنیم. لذا برای ارزیابی بهره وری شعاعی به عنوان هدف اصلی و همچنین بهبود به عنوان هدف ثانویه نیاز داریم که $\epsilon > 0$ تا حد امکان کوچک شود که این امر باعث خطای محاسباتی و بی دقتی های غیرقابل پذیرش می شود. لذا رویکرد دومرحله ای اینجا مطرح می شود (علی و سیفورد، ۱۹۹۳).

در اینجا قصد داریم مدل های DEA را با محدودیت های وزنی در نظر بگیریم. اینها محدودیت های اضافی تحمیل شده بر مؤلفه های متغیر DMU در مدل مضریمی DEA هستند. (کوک و ژو ۲۰۰۸ و پودینوسکی ۱۹۹۹ و ۲۰۰۴ و تاناسولیس، پورتلا و آلن ۲۰۰۴). این گونه محدودیت ها می توانند برای همسان سازی مقادیر در یک مدل DEA استفاده شوند که معمولاً منجر به ایجاد یک توانایی توسعه یافته این مدل برای تمایز قائل شدن بین کارایی DMUها می گردد. (آلن و همکاران، ۱۹۹۷)

هماهنگ کردن محدودیت های وزنی در یک DEA مضریمی منجر به تولید جملات اضافه بر دوگان مسئله می شود که پودینوسکی در سال ۲۰۰۴ اینها را تحت عنوان بده بستان های تولید بکار برد که نشان دهنده تغییرات همزمان در ورودی ها و خروجی ها در هر DMU در فناوری مورد استفاده است. پس استفاده از این محدودیت ها منجر به توسعه مدل فناوری می گردد (چارلز، کوپر، وی و هوانگ ۱۹۸۹، رول، کوک و گونالی ۱۹۹۱). ارتباط دوطرفه بین محدودیت های وزنی و بده بستان های تولید می تواند پایه و اساسی برای پیکربندی محدودیت های وزنی باشد که برای آن فناوری گسترده و مرزهای کارایی از دیدگاه فناوری قابل مفهوم هستند. یعنی تمام DMUهای موجود در فناوری گسترده دارای مفهوم و معنی از نظر فناوری هستند. روش های حل مدل های DEA بدون محدودیت های وزنی برای حل مدل های دارای محدودیت های وزنی کاربرد دارند. حال اگر مرحله دوم بهینه سازی برای حل مدل DEA با محدودیت وزنی مورد استفاده قرار گیرد. DMU هدف حاصل می تواند ورودی منفی داشته باشد و این بدلیل بحساب آوردن ناکارایی شعاعی در مرحله بهینه سازی است که بی معنی است. لذا بوسیله مرحله دوم بهینه سازی اصلاح شده حل می شود (پودینوسکی، ۲۰۰۷). در کل هدف ما کم کردن خطای محاسباتی استفاده از کران های پایین بسیار کوچک برای وزن های ورودی و خروجی در این مدل مضریمی است.

در ابتدا باید رابطه متقابل بین محدودیت های وزنی و فرایند بده بستان را طرح ریزی کنیم و مفهوم فناوری تولید بدست آمده از الگوهای DEA را با محدودیت های وزنی بررسی کنیم و نشان دهیم که بیان تک مرحله ای الگوهای DEA می تواند منجر به شناخت و درک نادرست از هدفهای بهره وری شود.

ارزیابی بهره وری شعاعی خروجی $DMU(x_0, y_0)$ بوسیله مدل مضربی CRS که محدودیت های وزنی K را به بردارهای u و v (وزن های ورودی و خروجی) اختصاص می دهد در نظر بگیرید:

$$v^T P_t - u^T Q_t \geq 0 \quad T=1,2,\dots,K \quad \text{رابطه ۱}$$

سمت راست معادلات به عنوان قیدهای وزنی همگن، صفر است (پودینوسکی ۲۰۰۴). مؤلفه های برداری $Q_+ \in R^s$ و $P_+ \in R^m$ می توانند مثبت، منفی و صفر باشند. مدل مضربی خروجی محور CRS را در نظر بگیرید که محدودیت های وزنی را ترکیب کند. بهره وری شعاعی DMU_0 عکس ارزش بهینه η^* برنامه LP زیر است.

$$\eta^* = \min v^T X_0 \quad \text{رابطه ۲}$$

قرار می دهیم:

$$u^T y_0 = 1$$

$$v^T x_j - u^T y_j \geq 0 \quad j=1,\dots,n \quad x_j \in R^m \quad y_j \in R^s$$

$$v^T P_t - u^T Q_t \geq 0 \quad t=1,\dots,k$$

$$u, v \geq 0$$

دوگان این مدل را بصورت زیر نشان می دهیم (محدودیت های دوگان تساوی هایی است که با بردارهای غیرمنفی e و d بیان می شود).

$$\eta^* = \min \eta$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j X_j + \sum_{t=1}^k \pi_t P_t + d = X_0$$

رابطه ۳

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j + \sum_{t=1}^k \pi_t Q_t - e = \eta Y_0$$

$e, d, \pi, \lambda \geq 0$ و آزاد در علامت.

واضح است که محدودیت های وزنی در مدل مضربی ۲ جملات دوگان در مدل ۳ را ایجاد می کند (پودینوسکی ۲۰۰۴). پودینوسکی در سال ۲۰۰۴ این جملات را بده بستان تولید نامید. مدل ۳ بصورت زیر DMU_0 را بر روی مرز کارایی CRS تصویرسازی می کند.

تعریف ۱. (پودینوسکی ۲۰۰۴) فناوری CRS را با بده بستان تولیدی T_{CRS-T_0} مجموعه ای از تمام DMU هایی $(x, y) \in R_t^m \times R_t^s$ است که برای آنها بردارهای شدت $\lambda \in R_t^n$ و $\pi \in R_t^n$ و بردارهایی بی اثر $d \in R_t^m$ و $e \in R_t^m$ وجود دارند بطوری که:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j X_j + \sum_{t=1}^k \pi_t P_t + d = X_0$$

رابطه ۴

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j + \sum_{t=1}^k \pi_t Q_t - e = Y_0$$

جملات $\sum_{j=1}^n \lambda_j X_j$ و $\sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j$ در معادله ۴ یک DMU دلخواه در فناوری CRS را شرح می دهد و جملات $\sum_{t=1}^k \pi_t P_t$ و

از طریق بده بستان های (P_t, Q_t) در برخی از نسبت های $\pi_t \geq 0$ این DMU را اصلاح می کند. پس این DMU

با افزایش ورودی ها به اندازه d و کاهش خروجی ها به اندازه e اصلاح می شود. اگر ورودی و خروجی مثبت بمانند این DMU به عنوان عضوی از T_{CRS-T_0} در نظر گرفته می شود.

فناوری VRS به صورت مشابه و با الزام اضافی که $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ تعریف می شود.

واضح است که متحد کردن محدودیت های وزنی ۱ در مدل ضربی ۲ باعث عدم انعطاف آن می شود. چنانچه محدودیت های وزنی ناسازگار باشند نمی توان از طریق حل مدل های ۲ و یا ۳ مشخص شود.

پودینوسکی، بوزدین و چامیوا (۲۰۱۵ و ۲۰۱۳) روش های تحلیلی و محاسباتی خاص را برای بررسی سازگاری یا عدم سازگاری این محدودیت ها ارائه کردند. اگر محدودیت های وزنی ناسازگار باشند یعنی زمان تخصیص آنها دچار خطا شده ایم و باید دوباره ارزیابی شوند. در ادامه مباحث محدودیت های وزنی را سازگار فرض کنیم.

مدل یک مرحله ای تصحیح شده

براساس تعریف (۱)، در زیر، یک تصحیح ساده در پوشش و احاطه تک مرحله ای و مدل های ضربی را در نظر می گیریم که بر مسئله برجسته شده در بخش (۳) غلبه کنیم. این مدل های واحدهای ناکارآمد روی مرز فناوری های T_{CRS-TO} و T_{VRS-TO} را شناسایی کند. به ویژه، با تعریف چنین فناوری هایی، غیرمنفی بودن ورودی ها و خروجی های هدف مشخص می شود.

مدل های خروجی-محور

با به حساب آوردن تعریف (۱)، برنامه خروجی محور یک مرحله ای که یک هدف کارآمد در متن فناوری T_{CRS-TO} را شناسایی می کند، می تواند به شکل زیر بیان شود:

$$\max \eta + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m \xi_i + \sum_{r=1}^s \varsigma_r \right) \quad \underline{1}$$

با توجه به این که داریم:

$$(X_0 - \xi, \eta Y_0 + \varsigma) \in T_{CRS-TO} \quad \xi, \varsigma \geq 0$$

بیان کامل برنامه شماره (۱۴) به این صورت می باشد:

$$\max \eta + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m \xi_i + \sum_{r=1}^s \varsigma_r \right) \quad \underline{2}$$

درحالی که:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j X_j + \sum_{t=1}^k \pi_t P_t + d = X_0 - \xi \quad \underline{3}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j + \sum_{t=1}^k \pi_t Q_t - e = \eta Y_0 + \xi \quad \underline{4}$$

$$X_0 - \zeta \geq 0 \quad \underline{5}$$

$$nY_0 + \zeta \geq 0 \quad \underline{6}$$

علامت آزاد $\lambda, \pi, d, e, \zeta, \varsigma \geq 0, \eta$

توجه داشته باشید که برنامه (۲) می تواند ساده شود. در هر یک از جواب های بهینه آن، بردار e باید یک بردار صفر باشد. دوم این که برای تمامی قیدهای $\varepsilon > 0$ کوچک، (۶) برقرار است. از این رو، برنامه (۲) می تواند به این صورت نیز بیان شود:

$$\max \eta + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m \zeta_i + \sum_{r=1}^s \varsigma_r \right) \quad \underline{7}$$

که داریم:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j X_j + \sum_{t=1}^k \pi_t P_t + d = X_0 - \zeta \quad \underline{8}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j + \sum_{t=1}^k \pi_t Q_t - e = nY_0 + \zeta \quad \underline{9}$$

$$X_0 - \zeta \geq 0 \quad \underline{10}$$

$$\lambda, \pi, d, e, \zeta, \varsigma \geq 0, \eta \quad \underline{11}$$

رابطه $\langle \lambda^*, \pi^*, d^*, \zeta^*, \varsigma^*, \eta^* \rangle$ را یک جواب بهینه برای برنامه (۲) در نظر بگیرید. هدف DMU به این صورت تعریف می شود:

$$(X^*, Y^*) = (X_0 - \zeta^*, \eta^* Y_0 + \varsigma^*) \quad 12$$

به دلیل این که (X^*, Y^*) معادله اصلی (۴) (که در آن e یک بردار صفر است) را برقرار می سازد؛ و $X^* \geq 0$ و $Y^* \geq 0$ داریم: $(X^*, Y^*) \in T_{CRS-TO}$ ، نتیجه بعدی نشان می دهد که DMU (X^*, Y^*) می تواند به صورت یک هدف کارآمد از DMU (X_0, Y_0) در نظر گرفته شود.

قضیه ۱. DMU (X^*, Y^*) در فناوری T_{CRS-TO} کارآمد و بهره ور است.

با متناظر در نظر گرفتن بردارهای دوگانه v, u, w ، به ترتیب با محدودیت های (۸) و محدودیت های خنثی شده (۹) و (۱۰) برنامه (۷) می تواند به صورت زیر بیان گردد:

$$\min (v^T + w^T) X_0$$

که داریم

$$u^T Y_0 = 1 \quad (13)$$

$$v^T X_j - u^T Y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$v^T P_t - u^T Q_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, K$$

$$v_i + w_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m$$

$$u_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s$$

$$v, w \geq 0$$

مدل های ورودی محور

در راستای ورودی، برنامه (7) نیاز به یک اصلاح بدیهی به این صورت دارد: (که θ نشان دهنده فاکتور اصلاح متناسب با ورودی می باشد)

$$\max \theta - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m \xi_i + \sum_{r=1}^s \zeta_r \right)$$

که داریم:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j X_j + \sum_{t=1}^K \pi_t P_t + d = \theta X_0 - \zeta$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j + \sum_{t=1}^K \pi_t Q_t = Y_0 + \zeta$$

$$\theta X_0 - \zeta \geq 0$$

$$\lambda, \pi, d, \zeta, \varepsilon \geq 0, \theta \quad (\text{علامت آزاد}) \quad (14)$$

هر جواب بهینه برنامه (14) با یک روش عادی، یک هدف بهره ور برای $DMU(X_0, Y_0)$ و تعریف می کند:

$$(X^*, Y^*) = (\theta X_0 - \zeta^*, Y_0 + \zeta^*)$$

که θ^* ، ζ^* و ε^* مؤلفه های یک جواب بهینه برنامه (14) هستند.

با استفاده از همین نمادگذاری برای بردارهای دوگانه v, u و w مثل بالا، برنامه (14) به این شکل بیان می شود:

(14)

$$\max u^T Y_0$$

$$(v^T + w^T) X_0 = 1$$

$$v^T X_j - u^T Y_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$v^T P_t - u^T Q_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, K$$

$$v_i + w_i \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m$$

$$u_r \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s$$

$$v, w \geq 0$$

نکته ۲. در حالت VRS، برنامه پوششی (7) شامل یک تساوی نرمال اضافی دیگر نیز می باشد. از این رو، برنامه ضربی متناظر (13) از طریق اختصاص متغیر w علامت آزاد اضافی متناظر با (5)، اصلاح می شود. برنامه ورودی محور (14) و همزاد آن یعنی (15) به یک روش مشابه مورد عمل قرار می گیرند.

مثال عددی.

جدول زیر، DMUهای A و B ارزیابی شده بر روی دو ورودی و یک خروجی را نشان می دهد. فرض کنید بخواهیم کارایی محوری خروجی مربوط به DMU B را با استفاده از الگوی VRS DEA تک مرحله ای را ارزیابی کنیم که در آن $\varepsilon = 0.001$ است. سپس فرض کنید بخواهیم محدودیت وزنی زیر را وارد کنیم که وزن های v_1 و v_2 مربوط به ورودی های اول و دوم را به هم مرتبط می کنند:

خروجی	ورودی ۲	ورودی ۱	DMU
۱	۱	۳	A
۱	۳	۱	B

جدول DMU های A و B در مثال ۱

$$-2v_1 + 1v_2 \geq 0 \quad (I)$$

با محدودیت وزنی (I)، مدل VRS ضریبی خروجی-محور یک طرفه رایج برای DMU B به این شکل نمایش داده می شود:

$$\min 1v_1 + 3v_2 + w \quad (II)$$

به صورتی که

$$1u_1 = 1$$

$$3v_1 + 1v_2 - 1u_1 + w \geq 0,$$

$$1v_1 + 3v_2 - 1u_1 + w \geq 0,$$

$$-2v_1 + 1v_2 \geq 0,$$

$$v_1, v_2, u_1 \geq 0.001, w \quad (\text{علامت آزاد})$$

همان گونه که قبلاً شرح داده شد، محدودیت وزنی (I) بده بستان تولیدی دوگانه‌ای به صورت $P_1 = (-2, 1)^T \in R^2$ را ایجاد می کند و $Q_1 = (0) \in R^1$. مدل پوششی مربوط به (II) به صورت زیر است:

$$\max \eta + 0.001(d_1 + d_2 + e_1) \quad (III)$$

به طوری که

$$3\lambda_A + 1\lambda_B - 2\pi_1 + 1d_1 = 1,$$

$$1\lambda_A + 3\lambda_B + 1\pi_1 + 1d_2 = 3,$$

$$1\lambda_A + 1\lambda_B - 1e_1 = 1\eta,$$

$$\lambda_A + \lambda_B = 1,$$

$$\lambda_A, \lambda_B, \pi_1, d_1, d_2, e_1 \geq 0, \eta \quad (\text{علامت آزاد})$$

برنامه پوششی فوق دارای یک جواب منحصر به فرد و کاملاً بهینه‌ای است (این را می توان از روی نموداری که در ادامه خواهد آمد نیز مشاهده کرد و می تواند به طور رسمی با استفاده از تئوری دوگانگی زیر ثابت شود):

$$\hat{\lambda}_A = 1, \hat{\lambda}_B = 0, \hat{\pi}_1 = 2, \hat{d}_1 = 2, \hat{d}_2 = 0, \hat{e}_1 = 0, \hat{\eta} = 1 \quad (IV)$$

این جواب چندان دشوار به نظر می رسد: شاید یک نفر به طور قراردادی، مقدار معکوس $1/\hat{\eta} = 1$ را به صورت بهره وری شعاعی خروجی DMU B تفسیر کند و به درستی نتیجه گیری کند که این DMU، همان بهره وری شعاعی خروجی است (توجه داشته باشید که در این مثال، ۱ خروجی درست و منطقی کارآیی محوری DMU B است و با $\varepsilon = 0$ به دست می آید). علاوه بر این، به نظر می رسد بردار بی اثر، بهینه و غیرصفر $\hat{d}_1 = 2$ ، مقدار کمینه عدم بهره وری را بیان می کند که DMU B باید از طریق کاهش ورودی ۱، آن را حذف کند تا به کارآیی کامل دست پیدا کند.

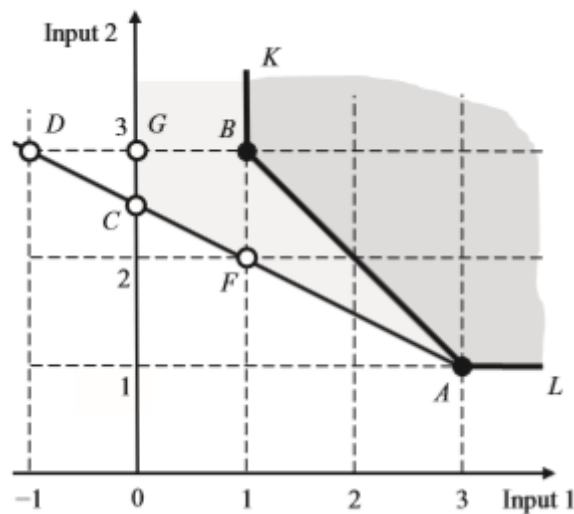
مشکلی که با راه حل فوق داریم زمانی بروز می کند که هدف بهره وری را برای DMU B محاسبه کنیم. مثل حالتی که بدون محدودیت های وزنی با آن مواجه بودیم، هدف بهره وری را به صورت هدف شعاعی DMU B تعریف می کنیم که به وسیله

عوامل خنثی و بهینه اصلاح شده است. این به ما هدف $DMU (\hat{X}, \hat{Y})$ را می دهد که در آن، دو مؤلفه اول، ورودی و مؤلفه آخر نقش خروجی را دارند.

$$\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1\hat{d}_1 \\ 3 - 1\hat{d}_2 \\ 1\hat{\eta} + 1\hat{e}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (V)$$

روشن است که جواب کاملاً بهینه برنامه یک مرحله ای (III) منجر به یک "هدف کارآمد" غیرمتناسب با یک مقدار منفی ورودی اول می گردد و $DMU (\hat{X}, \hat{Y})$ در فناوری TVRS-TO قرار ندارد.

شکل (۱) جواب بالا را به تصویر می کشد. منطقه تاریک بالا و سمت راست خط KBAL، فناوری RS استاندارد در دو بعد ورودی است. (در این مثال، بعد خروجی چندان اهمیتی ندارد و نشان داده نشده است).



شکل (۱). فناوری VRS القاء شده توسط DMU های A و B در مثال ۱ (نشان داده شده در دو بعد ورودی). خط متناظر با محدودیت وزنی (۱) است.

همان گونه که از مدل (III) مشاهده می شود و با توجه به تعریف شماره (۱)، DMU های موجود در فناوری VRS، سپس به وسیله بده بستان $Q_1 = (0)$ و $P_1 = (-2, 1)^T$ که توسط محدودیت وزنی (I) ایجاد شده اند اصلاح می شوند و در یک نسبت متغیر $\pi_1 \geq 0$ مورد استفاده قرار می گیرند. به عنوان مثال، کاربرد بده بستان (P_1, Q_1) برای DMU A با $\pi_1 = 1$ ، DMU F فرضی را به فناوری اضافه می کند. بده بستان مشابه با $\pi_1 = 1.5$ ، منجر به تولید DMU C می شود. به طور کلی، امکان تغییر π_1 در بازه $[0, 1.5]$ ، خط CA را ایجاد می کند. با فرض دسترسی آزاد ورودی ها، تأثیر این بده بستان عبارت است از اضافه شدن ناحیه خاکستری کم رنگ بالای خط CA مربوط به فناوری اصلی. توجه داشته باشید که ما نمی توانیم $\pi_1 \geq 1.5$ را نظر بگیریم؛ چرا که این منجر به ایجاد مقادیر منفی ورودی ۱ می گردد. به طور ویژه، DMU D در فناوری TVRS-TO وجود ندارد. همچنین توجه کنید که کاربرد بده بستان (P_1, Q_1) در سایر DMU ها (مثلاً در DMU B)، نقاط تازه ای به فناوری اضافه نمی کند.

(\hat{X}, \hat{Y}) هدف نادرست، متناظر با نقطه D در شکل (۱) است و خارج از فناوری قرار دارد.

این ممکن است منطقی به نظر برسد که این مسئله را از طریق جابجا نمودن ورودی ۱- "هدف منفی" در (۱۰) با صفر تصحیح کنیم و $DMU(\hat{X}, \hat{Y}) = (0, 3, 1)$ را به عنوان واحد هدف "تصحیح شده" به دست آوریم. DMU اخیر متناظر با نقطه G در شکل (۱) است. با این وجود، واضح است که G تحت تسلط و اشراف واحد C قرار می گیرد و بنابراین، ناکارآمد است و نمی تواند یک هدف بهره ور برای B قلمداد شود. این نشان می دهد که از لحاظ تئوری، جابجا کردن ورودی های منفی با صفر، نادرست است.

مثال بالا حکایت از آن دارد که اختصاص یک هدف ثانویه در زمینه بیشینه سازی ورودی و خروجی در برنامه (III) می تواند منجر به مقادیر هدف ورودی منفی گردد. این موافق با یافته های پودینوسکی (۲۰۰۷) نیز هست؛ وی نشان می دهد که بیشینه سازی ساده بخش ورودی و خروجی در برنامه های دارای محدودیت های وزنی نیز می تواند منجر به مقادیر منفی ورودی گردد. توجه کنید که این مسئله، با $\varepsilon > 0$ در وزن های ورودی و خروجی، ناشی از مدل های CRS و VRS DEA استاندارد که فاقد محدودیت های وزنی هستند، نمی باشد.

شکل (۱). فناوری VRS القاء شده توسط DMU های A و B در مثال ۱ (نشان داده شده در دو بعد ورودی). خط AC متناظر با محدودیت وزنی (۶) است.

حال از طریق بازبینی مثال ۱ خواهیم داشت، استفاده از مدل های جدید را مجسم می کنیم. همان طور که نشان داده شده است. حل مدل تک مرحله ای (III) منجر به یک هدف نادرست (\hat{X}, \hat{Y}) برای DMU B ناکارآمد می گردد. همان گونه که در بالا نیز نشان داده شد، به جای (III)، باید برنامه (۲-۱) را حل کنیم که به شکل زیر در نظر گرفته می شود.

$$\max \eta + 0.001(\xi_1 + \xi_2 + \varsigma_1) \quad (III)$$

که داریم

$$3\lambda_A + 1\lambda_B - 2\pi_1 + 1d_1 = 1 - \xi_1,$$

$$1\lambda_A + 3\lambda_B + 1\pi_1 + 1d_2 = 3 - \xi_2,$$

$$1\lambda_A + 1\lambda_B = 1\eta + \varsigma_1,$$

$$1 - \xi_1 \geq 0,$$

$$3 - \xi_2 \geq 0,$$

$$\lambda_A + \lambda_B = 1,$$

$$\lambda_A, \lambda_B, \pi_1, d_1, d_2, \xi_1, \xi_2, \varsigma_1 \geq 0, \eta \quad (*) \quad (\text{علامت آزاد})$$

به صراحت می توان اثبات کرد که (*) دارای جواب بهینه و منحصر بفرد دقیق زیر می باشد:

$$\lambda_A^* = 1, \lambda_B^* = 0, \pi_1^* = 1.5, d_1^* = d_2^* = 0, \xi_1^* = 1, \xi_2^* = 0.5, \varsigma_1^* = 0, \eta^* = 1$$

هدف بهره ور متناظر با آن نیز به این شکل نشان داده می شود:

$$\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \xi_1^* \\ 3 - \xi_2^* \\ 1\eta^* + \varsigma_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

همان گونه که در بالا نیز شرح داده شد، به وسیله ساختار برنامه (۲-۱)، داریم $(X^*, Y^*) \in T_{VRS-TO}$. با قضیه ۵ DMU (X^*, Y^*) بهره ور و کارآمد است. در شکل (۱)، این DMU متناظر با نقطه C است.

نتیجه گیری

شناسایی اهداف بهره ور مربوط به DMUهای ناکارآمد در مدل های CRS و VRS DEA می تواند به صورت ترکی از دو مرحله مورد بررسی قرار گیرد. طبق نظر علی و سیفورد (۱۹۹۳)، نخستین مرحله به شناسایی تصویر شعاعی ورودی یا خروجی DMU تحت ارزیابی مرزبندی فناوری می پردازد. هدف مرحله دوم عبارت است از حذف هر گونه ناکارآمدی آمیخته در DMU هدف شعاعی. این امر از طریق بیشینه سازی حاصل جمع ورودی و خروجی پسماند محقق می گردد.

مدل های DEA ضریبی تک مرحله ای رایج، یک کران پایین (و به لحاظ تئوری بسیار ناچیز) $\varepsilon > 0$ را بر وزن های ورودی و خروجی اعمال می کنند. مدل های پوششی دوگانه آنها، به عنوان هدف اولیه، به طور همزمان بهره وری شعاعی ورودی یا خروجی DMU را مورد بررسی قرار می دهند و به عنوان هدف بعد، ورودی و خروجی را به ازاء فعالیت های صورت گرفته مورد مطالعه قرار می دهند.

مثال هایی که در مقاله ارائه کردیم، نشان می دهند که مدل های تک مرحله ای VRS و CRS DEA با محدودیت های وزنی، حتی اگر با دقت و برای یک $\varepsilon > 0$ کوچک و دلخواه حل شوند، می توانند منجر به ورودی های منفی DMUهای هدف شوند. ما نشان می دهیم که چنین مشکلی پیش می آید؛ چرا که تمامی شرایط تعریف فناوری با محدودیت های وزنی، با دقت برای فرمولاسیون های DEA استاندارد مورد توجه قرار نگرفته و لحاظ نشده اند. سپس یک مدل DEA تک مرحله ای با محدودیت های وزنی را معرفی کردیم که به لحاظ نظری، اهداف بهره وری را ایجاد می کند که بر روی مرز فناوری تولید موردنظر مستقر است.

مراجع

- Allen, R., Athanassopoulos, A., Dyson, R. G., & Thanassoulis, E. 1997. Weights restrictions and value judgements in data envelopment analysis: Evolution, development and future directions. *Annals of Operations Research*, 73, 13–34.
- Ali, A. I., & Seiford, L. M. 1993a. Computational accuracy and infinitesimals in data envelopment analysis. *Information Systems and Operational Research*, 31, 290–297.
- Ali, A. I., & Seiford, L. M. 1993b. The mathematical programming approach to efficiency analysis. In H. O. Fried, C. A. K. Lovell, & S. S. Schmidt (Eds.), *The measurement of productive efficiency: Techniques and applications* (pp. 120–159). New York: Oxford University Press.
- Charnes, A., Cooper, W. W., Wei, Q. L., & Huang, Z. M. 1989. Cone ratio data envelopment analysis and multi-objective programming. *International Journal of Systems Science*, 20, 1099–1118.
- Cook, W. D., & Zhu, J. 2008. Context-dependent assurance regions in DEA. *Operations Research*, 56, 69–78.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Tone, K. 2007. *Data envelopment analysis. A comprehensive text with models, applications, references and DEA-Solver software* (2nd ed.). New York: Springer Science + Business Media.
- Podinovski, V. V. 1999. Side effects of absolute weight bounds in DEA models. *European Journal of Operational Research*, 115, 583–595.
- Podinovski, V. V. 2004a. Production trade-offs and weight restrictions in data envelopment analysis. *Journal of the Operational Research Society*, 55, 1311–1322.
- Podinovski, V. V. 2004b. Suitability and redundancy of non-homogeneous weight restrictions for measuring the relative efficiency in DEA. *European Journal of Operational Research*, 154, 380–395.

- Podinovski, V. V. 2007a. Improving data envelopment analysis by the use of production trade-offs. *Journal of the Operational Research Society*, 58, 1261–1270.
- Podinovski, V. V. 2007b. Computation of efficient targets in DEA models with production trade-offs and weight restrictions. *European Journal of Operational Research*, 181, 586-591
- Thanassoulis, E., Portela, M. C., & Allen, R. 2004. Incorporating value judgements in DEA. In W. W. Cooper, L. M. Seiford, & J. Zhu (Eds.), *Handbook on data envelopment analysis* (pp. 99–138). Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Thanassoulis, E., Portela, M. C. S., & Despic´, O. 2008. Data envelopment analysis: The mathematical programming approach to efficiency analysis. In H. O. Fried, C. A. K. Lovell, & S. S. Schmidt (Eds.), *The measurement of productive efficiency and productivity growth* (pp. 251–420). New York: Oxford University Press.
- Victor . Podinovski, Tatiana Bouzdine - Chameeva , On single-stage DEA models with weight restrictions, *European Journal of Operational Research*. 2015.