فصلنامه علمی تخصصی ایده های نو در علوم، مهندسی و فناوری ، دوره ۲، شماره۲، تابستان ۱۳۹۷، ص ۴۱-۳۳
ISSN: 2588-3984
http://www.Tajournals.com

اثر گرادیان بر حاصل ضرب داخلی دو بردار در فضای دو بعدی و تعمیم اثر گرادیان بر حاصل ضرب داخلی n بردار در فضای n– بعدی

پرویز میرسالاری اولشکر
دانشگاه پیام نور اهواز

چکیده

در این مقاله به بررسی اثر عملگر برداری گرادیان بر حاصل ضرب داخلی دو بردار در فضای دو بعدی و تعمیم اثر گرادیان بر حاصل ضرب داخلی n بردار در فضای n– بعدی می پردازیم.

واژگان کلیدی: گرادیان، ضرب داخلی، فضای n–بعدی

عنوان مقاله: اثر گرادیان بر حاصل ضرب داخلی دو بردار در فضای دو بعدی و تعمیم اثر گرادیان بر حاصل ضرب داخلی n بردار در فضای n–بعدی
دوره ۲ / شماره ۲ / تابستان ۱۳۹۷/ ص ۴۱- ۳۳

فصلنامه علمی تخصصی ایده های نو در علوم، مهندسی و فناوری ، دوره ۲، شماره۲، تابستان ۱۳۹۷، ص ۴۱-۳۳
ISSN: 2588-3984
http://www.Tajournals.com

مقدمه

ضرب داخلی[۱] که ضرب نقطه‌ای[۲]و ضرب اسکالر[۳]نیز نامیده می‌شود، یک عمل دوتایی بین دو بردار در فضای-nبعدی اقلیدسی[۴] است که نتیجه آن یک عدد حقیقی است. بنابراین، ضرب داخلی دو کمیت برداری، یک کمیت نرده‌ای است.
ضرب داخلی یا ضرب اسکالر به ما این امکان را میدهد که مفاهیم هندسی از قبیل زاویه و طول یک بردار را تعریف نماییم. ضرب داخلی در ریاضیات،مهندسی و فیزیک کاربردهای فراوانی دارد.

یک ذره که در طول یک خط راست حرکت می کند فقط می تواند در دو جهت حرکت کند. ما می توانیم حرکت آن را در یک جهت مثبت و در جهت دیگر منفی درنظر بگیریم. برای ذراتی که در سه بعد حرکت می کنند، یک علامت منفی و یک علامت مثبت برای تعیین جهت حرکت کافی نیست. بنابراین باید از بردار استفاده کنیم.

یک **بردار** دارای جهت و بزرگی است، و از قواعد خاصی پیروی می کند. یک کمیت برداری، کمیتی است که جهت و بزرگی دارد و بنابراین، می تواند با استفاده از بردار نمایش داده شود. برخی کمیت های برداری در فیزیک عبارت اند از جابه جایی، سرعت و شتاب.

گرادیان یک تابع و یا میدان اسکالر کمیتی برداری است.گرادیان در جهت بیشترین تغییر مسیر یک میدان یا تابع اسکالر قرار دارد و اندازه ی گرادیان همان بیشترین مقدار تغییرات است. یکی از کاربردهای گرادیان ، نشان دادن تغییر یک تابع است. به این صورت که ضرب داخلی گرادیان تابع در یک فاصله ی معین ، برابر خواهد بود با تغییرات آن تابع.

عنصر دیفرانسیلی طول یا همان فاصله ی معین به صورت dr=Xdx+Ydy+Zdz نشان داده می شود و حروف بزرگ بردارهای یکه هستند.

کاملا واضح است که این عنصر دارای جهت است.گرادیان تابع هم دارای جهت است و همان طور که انتظار می رود ضرب داخلی این دو کمیت برداری ، در نهایت تغییرات تابع را به ما می دهد که باید اسکالر باشد.

حال اگر این تغییرات تابع برابر با صفر باشد ، نتیجه می گیریم که بردار گرادیان و بردار مکان بر هم عمود بوده اند.

برای یک تغییر معین در تابع ، عنصر دیفرانسیلی و برداری مکان که در بالا نوشتیم ، وقتی مینیمم می شود که با گرادیان تابع موازی باشد یعنی Cos(x)=0 : ایکس زاویه ی بین بردار گرادیان و بردار مکان است..

باید توجه داشت همیشه گرادیان که یک عملگر برداری است بر یک تابع اسکالر عمل می کند که حاصل ضرب آن یک بردار می-باشد. پر واضح است وقتی اثر گردایان را بخواهیم به حاصل ضرب داخلی n بردار تعمیم دهیم فقط می توانیم تعداد بردارهایی که مجاز هستیم ضرب کنیم زوج بردار می باشد، چون حاصل ضرب دو بردار و چهار بردار و شش بردار و ... اسکالر می باشد و ما مجاز نیستیم از تعداد فرد بردارها بصورت حاصل ضرب داخلی جلوی عملگر گرادیان استفاده کنیم. برای مثال

$$\vec{A}.\vec{B} = (a_1\ a_2\ a_3).(b_1\ b_2\ b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

که حاصل ضرب داخلی فوق یک عدد یا اسکالر می‌باشد و حاصل ضرب داخلی تعداد فرد بردار روی یک عملگر گرادیان، تعریف نشده می باشد.

---
[1] Inner product
[2] Dot product
[3] Scalar product
[4] Euclidean

فصلنامه علمی تخصصی ایده های نو در علوم، مهندسی و فناوری ، دوره ۲، شماره۲، تابستان ۱۳۹۷، ص ۴۱-۳۳
ISSN: 2588-3984
http://www.Tajournals.com

باید توجه داشت که بردارهایی که در حاصل ضرب داخلی استفاده می‌کنیم فقط دارای مولفه x جهت بردار یکه می باشد البته برای اینکه محاسبات خیلی پیچیده نشوند. تصمیم براساس اثبات اثر گرادیان بر حاصل ضرب داخلی دو بردار که در کتاب ریاضی فیزیک نوشته جورج آرفکن[5] [1,2] می باشد را ارائه می دهیم.

ادبیات تحقیق

مثال موجود در کتاب جورج آرفکن به شرح زیر می باشد و محاسبات را که تعمیم مسئله از حالت دو بعدی به n– بعدی است، ادامه می دهیم.

$$\vec{A} = A_x(x\ y\ z)\hat{\imath}\,, B = B(x\,,y\,,z)\hat{\imath}$$

با توجه به فرمول پایه موجود در کتاب جورج آرفکن محاسبه را تا پایان ادامه می دهیم.

$$(1)\vec{\nabla}\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = \left(\vec{B}.\nabla\right)\hat{A} + \left(\vec{A}.\nabla\right)\mathrm{B} + \vec{B}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}(A.B) &= \left(\frac{\partial}{\partial_x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial_y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial_z}\hat{k}\right)(A_xB_x)\\
&= \frac{\partial}{\partial_x}(A_xB_x)i + \frac{\partial}{\partial_y}(A_xB_x)\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial_z}(A_xB_x)\hat{k}\\
&= \left(B_x\frac{\partial A_x}{\partial_x} + A_x\frac{\partial B_x}{\partial_x}\right)i + \left(B_x\frac{\partial A_x}{\partial_y} + A_x\frac{\partial B_x}{\partial_y}\right)j\\
&+ \left(B_x\frac{\partial A}{\partial_z} + A_x\frac{\partial B_x}{\partial_z}\right)k
\end{aligned}$$

حالا می خواهیم قسمتهای فرمول (۱) را به طور جداگانه محاسبه کنیم.

$$\nabla\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = \left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)B + \vec{B}\times\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{A}}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$$

$$\left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right)\vec{A} = \left(B_x\frac{\partial_x}{\partial_x}\right)A_x\hat{\imath} \Rightarrow \left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right)\vec{A} = B_x\frac{\partial A_x}{\partial_x}\hat{\imath}$$

$$\left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)\vec{B} = \left(A_x\frac{\partial}{\partial_x}\right)B_x\hat{\imath} \Rightarrow \left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)\vec{B} = A_x\frac{\partial B_x}{\partial_x}\hat{\imath}$$

[5] George Arfken

فصلنامه علمی تخصصی ایده های نو در علوم، مهندسی و فناوری ، دوره ۲، شماره۲، تابستان ۱۳۹۷، ص ۴۱-۳۳
ISSN: 2588-3984
http://www.Tajournals.com

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial_x} & \frac{\partial}{\partial_y} & \frac{\partial}{\partial_z} \\ A_x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial_y} \times 0 - \frac{\partial}{\partial_z} \times 0\right) i + \left(\frac{\partial}{\partial_z} A_x - \frac{\partial}{\partial_x} \times 0\right) \hat{\jmath}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial_x} \times 0 - \frac{\partial}{\partial_y} A_x\right) \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \mathrm{A} = (0-0)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial_x} - 0\right) j + \left(0 - \frac{\partial A_x}{\partial_y}\right) k \Longrightarrow \vec{\nabla} \times \mathrm{A} = \frac{\partial A_x}{\partial_z} \hat{\jmath} - \frac{\partial A_x}{\partial_y} \hat{k}$$

$$\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ B_x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial A_x}{\partial_z} & \frac{-\partial A_x}{\partial_y} \end{vmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{B_x} (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$= \left[0 \times \left(\frac{-\partial A_x}{\partial_y}\right) - 0 \times \frac{\partial A_x}{\partial_z} \times \hat{\imath}\right] + \left[0 \times 0 - B_x \left(-\frac{\partial A_x}{\partial_y}\right)\right] \hat{\jmath}$$

$$+ \left(B_x \frac{\partial A_x}{\partial_z} - 0 \times 0\right) \hat{k}$$

$$\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = (0-0)\hat{\imath} + \left(0 + B_x \frac{\partial A_x}{\partial_y}\right) j + \left(B_x \frac{\partial A_x}{\partial_z} - 0\right) \hat{k} \Longrightarrow \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$= B_x \frac{\partial A_x}{\partial_y} \hat{\jmath} + B_x \frac{\partial A_x}{\partial_z} \hat{k} \qquad (2)$$

در رابطه (۲) با توجه به چرخش دستگاه مختصاتی داریم:

$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

می توان نوشت:

$$\vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = A_x \frac{\partial B_x}{\partial_y} \hat{\jmath} + A_x \frac{\partial B_x}{\partial_z} \hat{k}$$

و با جایگذاری قسمت های بدست آمده فرمول (۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})\\ = B_x\frac{\partial A_x}{\partial_x}\hat{\imath} + A_x\frac{\partial B_x}{\partial_x}\hat{\imath} + B_x\frac{\partial A_x}{\partial_y}\hat{\jmath} + B_x\frac{\partial A_x}{\partial_z}\hat{k} + A_x\frac{\partial B_x}{\partial_y}\hat{\jmath}\\ + A_x\frac{\partial B_x}{\partial_z}\hat{k}\\ = \left(B_x\frac{\partial A_x}{\partial_x} + A_x\frac{\partial B_x}{\partial_x}\right)\hat{\imath}\\ + \left(B_x\frac{\partial A_x}{\partial_y} + A_x\frac{\partial B_x}{\partial_y}\right)\hat{\jmath}\left(B_x\frac{\partial A_x}{\partial_z} + A_x\frac{\partial B_x}{\partial_z}\right)\hat{k}\end{aligned}$$

که محاسبه معادل با گردایان حاصلضرب داخلی دو بردار می باشد.

$$(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \vec{A}\times(\vec{B}.\vec{\nabla}) = \vec{\nabla}(A.B)$$

تا اینجا، اثبات مربوط به مسئله موجود در کتاب جورج آرفکن به اتمام رسید. حالا تعمیم را برای گردایان حاصلضرب داخلی n بردار شروع می کنیم.

نتایج تحقیق

فرض می کنیم که

$$\vec{A} = \overrightarrow{A_x}(x,y,z),\qquad \vec{B} = \vec{B}_x(x,y,z),\qquad \vec{C} = C_x(x,y,z),\\ \vec{D} = D_x(x,y,z)$$

با توجه به اینکه برای حاصلضرب داخلی ۴ بردار و ۸ بردار و $2n$ بردار، گردایان را بر آنها اثر می دهیم و اگر برای حاصلضرب ۳ بردار یا ۵ بردار $2n+1$ بردار، گردایان را اعمال کنید، برای آنها $2n+1$ بردار گردایان تعریف نشده می شود.

حالا تعمیم را برای حاصلضرب داخلی $2n$ $(n \in N)$ بردار انجام می دهیم.

$$\nabla\vec{A}.\vec{B}.\vec{C}.\vec{D} = (\vec{A}\vec{B}\vec{C}.\nabla)\vec{D} + (\vec{A}\vec{B}\vec{C}\vec{D}.\vec{\nabla})\vec{C} + (\vec{B}\vec{C}\vec{D}.\nabla)\vec{A} + (\vec{C}\vec{D}\vec{A}.\nabla)\vec{B} + \vec{A}\vec{B}\vec{C}\times\vec{\nabla}\times\vec{D} + \vec{B}\vec{C}\vec{D}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{C}\vec{D}\vec{A}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} \qquad (3)$$

حالا قسمت های مختلف فرمول (3) را مانند محاسبات قبلی به طور جداگانه محاسبه می کنیم.

$$\begin{cases}(\vec{B}\vec{C}\vec{D}.\vec{\nabla})\vec{A} = B_xC_xD_x\frac{\partial A_x}{\partial_x}\hat{\imath}\\ (\vec{C}\vec{D}\vec{A}.\vec{\nabla})\mathrm{B} = C_xD_xA_x\frac{\partial B_x}{\partial_x}\hat{\imath}\end{cases}\quad \begin{cases}(\vec{A}\vec{B}\vec{C}.\vec{\nabla})\vec{D} = A_xB_xC_x\frac{\partial B}{\partial_x}\hat{\imath}\\ (\vec{A}\vec{B}\vec{D}.\vec{\nabla})\vec{C} = A_xB_xD_x\frac{\partial C_x}{\partial_x}\hat{\imath}\end{cases}$$

فصلنامه علمی تخصصی ایده های نو در علوم، مهندسی و فناوری ، دوره ۲، شماره۲، تابستان ۱۳۹۷، ص ۴۱-۳۳
ISSN: 2588-3984
http://www.Tajournals.com

$$\nabla \times D = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial_x} & \frac{\partial}{\partial_y} & \frac{\partial}{\partial_z} \\ D_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0-0) - \left(0 - \frac{\partial D_x}{\partial_z}\right) j + \frac{\partial D_x}{\partial_y} \hat{k} = \frac{\partial D_x}{\partial_z} j - \frac{\partial D_x}{\partial_y} \hat{k}$$

$$\vec{A}\vec{B}\vec{D} \times \vec{\nabla} \times \vec{D} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x B_x C_x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \vec{D}_x}{\partial_z} & \frac{-\partial \vec{D}_x}{\partial_y} \end{vmatrix}$$

$$= (0-0)i - \left(\vec{A}_x \vec{B}_x \vec{D}_x \left(\frac{-\partial \vec{D}_x}{\partial_y}\right) - 0\right) j + \vec{A}_x \vec{B}_x \vec{D}_x \frac{\partial \vec{D}_x}{\partial_z}$$

$$\vec{A}\vec{B}\vec{D} \times \vec{\nabla} \times \vec{C} = \vec{A}_x \vec{B}_x \vec{D}_x \frac{\partial \vec{C}_x}{\partial_y} j + \vec{A}_x \vec{B}_x \vec{D}_x \frac{\partial \vec{C}_x}{\partial_z} \hat{k}$$

$$\vec{C}\vec{D}\vec{A} \times \vec{\nabla} \times \vec{C} = \vec{C}_x \vec{D}_x \vec{A}_x \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial_y} j + \vec{C}_x \vec{D}_x \vec{A}_x \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial_z} \hat{k}$$

$$\vec{C}\vec{D}\vec{A} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{C}_x \vec{D}_x \vec{A}_x \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial_y} j + \vec{C}_x \vec{D}_x \vec{A}_x \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial_z} \hat{k}$$

$$\vec{C}\vec{D}\vec{B} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{C}_x \vec{D}_x \vec{B}_x \frac{\partial \vec{A}_x}{\partial_y} j + \vec{C}_x \vec{D}_x \vec{B}_x \frac{\partial \vec{A}_x}{\partial_z} \hat{k}$$

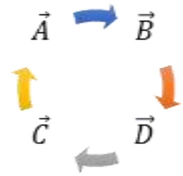
با جایگذاری در عبارت زیر محاسبه را ادامه می دهیم.

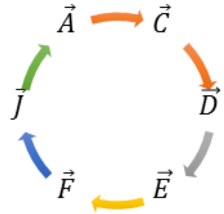
$$\vec{\nabla}\vec{A}.\vec{B}.\vec{C}.\vec{D} = (\vec{A}.\vec{B}.\vec{C}.\nabla)\vec{D} + (\vec{A}.\vec{B}.\vec{D}.\nabla)\vec{C} + (\vec{B}.\vec{C}.\vec{D}.\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{C}.\vec{D}.\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B}$$
$$+ \vec{A}\vec{B}\vec{C} \times \vec{\nabla} \times \vec{D} + \vec{B}\vec{C}\vec{D} \times \nabla \times \vec{A} + \vec{C}\vec{D}\vec{A} \times \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

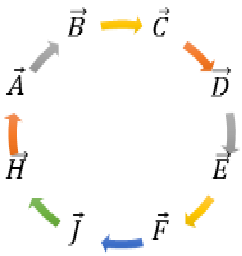
$$= A_x B_x C_x \frac{\partial \vec{D}}{\partial_y} + \vec{A}_x \vec{B}_x \vec{D}_x \frac{\partial \vec{C}}{\partial_y} + BCD.\frac{\partial \vec{A}_x}{\partial_x} + C_x D_x A_x \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial_x} \hat{\imath}$$
$$+ \left(\vec{A}_x \vec{B}_x \vec{D}_x \frac{\partial \vec{D}_x}{\partial_y} + \vec{A}_x \vec{B}_x \vec{D}_x \frac{\partial \vec{C}}{\partial_y} + C_x D_x A_x \frac{\partial \vec{B}_x}{\partial_y} + C_x D_x B_x \frac{\partial \vec{A}_x}{\partial_y}\right) j$$
$$+ \left(\vec{A}_x \vec{B}_x \vec{C}_x \frac{\partial D_x}{\partial_z} + \vec{A}_x \vec{B}_x \vec{D}_x \frac{\partial C_x}{\partial_z} + C_x D_x A_x \frac{\partial D_x}{\partial_z} + C_x D_x B_x \frac{\partial A}{\partial_z}\right) \hat{k}$$

فصلنامه علمی تخصصی ایده های نو در علوم، مهندسی و فناوری ، دوره ۲، شماره۲، تابستان ۱۳۹۷، ص ۴۱-۳۳
ISSN: 2588-3984
http://www.Tajournals.com

از قاعده چرخش مولفه های بردار استفاده می کنیم و این کار را برای 2n بردار تعمیم می دهیم.







در نتیجه خلاصه اثبات بصورت مقابل می باشد.

$$\vec{\nabla}\vec{A}.\vec{B}.\vec{C}.\vec{D} = (\vec{A}\vec{B}\vec{C}.\vec{\nabla})\vec{D} + (\vec{B}\vec{C}\vec{D}.\vec{\nabla})\vec{C} + (\vec{C}\vec{D}\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\vec{C}\vec{D}.\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A}\vec{B}\vec{C} \times \vec{\nabla} \times \vec{D} + (\vec{D}\vec{A}\vec{B}) \times \vec{\nabla} \times \vec{C} + \vec{C}\vec{D}\vec{A} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} + (\vec{B}\vec{C}\vec{D}) \times \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

اثبات برای گرادیان بر حاصلضرب داخلی چهار بردار پایان می یابد. با تکرار این روند محاسبه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\vec{A}.\vec{B}.\vec{C}.\vec{D}.\vec{E}.\vec{F} &= (\vec{B}\vec{C}\vec{D}\vec{E}\vec{F}.\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{C}\vec{D}\vec{E}\vec{F}\vec{A}.\nabla)\vec{B} + (\vec{A}\vec{B}\vec{D}\vec{E}\vec{F}.\vec{\nabla})\vec{C} \\ &+ (\vec{A}\vec{B}\vec{C}\vec{E}\vec{F}.\vec{\nabla})\vec{D} + (\vec{A}\vec{B}\vec{D}\vec{E}\vec{C}.\vec{\nabla})\vec{F} + (\vec{A}\vec{B}\vec{D}\vec{F}.\vec{\nabla})\vec{E} + \vec{A}\vec{B}\vec{C}\vec{D}\vec{E} \times \vec{\nabla} \\ &\times \vec{F} + \vec{A}\vec{B}\vec{C}\vec{D}\vec{F} \times \vec{\nabla} \times \mathrm{E} + \vec{A}\vec{B}\vec{C}\vec{E}\vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{D}) + \vec{A}\vec{B}\vec{C}\vec{E}\vec{F} \\ &\times (\vec{\nabla} \times \vec{C}) + (\vec{A}\vec{B}\vec{D}\vec{E}\vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B}\vec{C}\vec{D}\vec{E}\vec{F} \times \vec{\nabla} \times \vec{A})\end{aligned}$$

نکته: همان طور که در محاسبه بالا توجه می شود را اعمال گرادیان برای ۶ بردار می باشد و باید توجه داشت که در قبل ثابت کردیم بردارها دو به دو تبدیل به اسکالر (عدد) می شود و در نهایت اعمال گرادیان روی یک اسکالر (عدد) می باشد و در پایان باید گفت می باشد می توان حاصل ضرب 2n بردار ($n \in N$) یعنی برای حاصل ضرب ۲ بردار ۴ بردار ، ۶ بردار و هشت بردار و ۱۲ بردار و ۱۴ بردار و ۱۶ بردار و غیره تعمیم داد در این بخش حالت های مختلف بردارها وقتی بردارها با هم برابر باشد . شروع می کنیم ابتدا از حالت دو بردار شروع می کنیم و محاسبه را تا تساوی n– بردار ادامه می دهیم.

$$\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B}) = (\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} + B \times \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} = \vec{B} \Longrightarrow \nabla\vec{A} = 2(A.\nabla)\vec{A} + 2(A \times \nabla \times A) \Longrightarrow \tfrac{1}{2}\vec{\nabla}\vec{A} = [(\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]$$

اگر

اگر $\vec{A} = \vec{B} = \vec{C} = \vec{D}$ باشد آنگاه

$$\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B}.\vec{C}.\vec{D}) = \vec{\nabla}\vec{A}$$

حالا حالت تساوی را برای چهار بردار ادامه می دهیم.

$$\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B}.\vec{C}.\vec{D}) = (\vec{A}\vec{B}\vec{C}.\vec{\nabla})\vec{D} + (\vec{A}\vec{B}\vec{D}.\vec{\nabla})\vec{C} + (\vec{B}\vec{D}\vec{C}.\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{B}\vec{C}\vec{D}.\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}\vec{B}\vec{C} \times \vec{\nabla} \times \vec{C} \quad (٤)$$

با فرض $\vec{A} = \vec{B} = \vec{C} = \vec{D}$ فرمول (۴) تبدیل به رابطه زیر می شود.

فصلنامه علمی تخصصی ایده های نو در علوم، مهندسی و فناوری ، دوره ۲، شماره۲، تابستان ۱۳۹۷، ص ۴۱-۳۳
ISSN: 2588-3984
http://www.Tajournals.com

$$\nabla\vec{A}^4=(\vec{A}^3.\nabla)\vec{A}+(\vec{A}^3.\nabla)\mathrm{A}+(\vec{A}^3.\nabla)\vec{A}+(\vec{A}^3.\nabla)\vec{A}+\vec{A}^3\times\vec{\nabla}\times\vec{A}+A^3\times\vec{\nabla}+\vec{A}\times(\nabla\times A)+\vec{A}\times(\nabla\times A)\Rightarrow\frac{1}{4}\nabla\vec{A}=\left(A^{2n-1}.\vec{\nabla}\right)\vec{A}+A^{2n-1}\times\nabla\times A$$

نکته: برای حاصل ضرب دو بردار n=1 می باشد و برای ۴ بردار n=2 و برای ۶ بردار n=3 قرار دهیم.

در اینجا فرمول کلی را وقتی بردارها برابر باشند و چند مثال را به طور عددی حل می کنیم.

$$\frac{1}{2n}\vec{\nabla}A^{2n}=(A^{2n-1}.\nabla)A+A^{2n-1}\times(\nabla\times A)$$

مثال: برای حاصل ضرب دو بردار به ازای n=1 داریم:

$$\frac{1}{2\times 1}\overrightarrow{\nabla A^2}=(A.\nabla)A+A^{2n-1}\times(\nabla\times A)$$

مثال برای حاصل ضرب چهار بردار هنگامی که آن بردارها n=2 باشد.

$$\frac{1}{2\times 2}\vec{\nabla}\vec{A}^4=\left(\vec{A}^3.\vec{\nabla}\right)\vec{A}+\vec{A}^3\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{A}}\right)$$

مثال برای حاصل ضرب شش بردار هنگامی که بردار ها n=3 باشد.

$$\frac{1}{2\times 3}\vec{\nabla}\vec{A}^6=\left(\vec{A}^5.\vec{\nabla}\right)\vec{A}+A^5\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{A}}\right)$$

در پایان مقاله فرمول تعمیم یافته را با ایجاد تغییراتی به حالت حاصل ضرب داخلی دو بردار که حالت پایه است می رسیم که این راه حل نوعی اثبات محکم می باشد.

اگر $A=xi\,,B=xi$. اگر $C=i\,,D=i\Rightarrow C.D=1\ \Rightarrow$ طبق فرمول

در حال چهار بردار داریم و تلاش می کنیم تا بحال پایه ۲ بردار برسیم

با توجه $\nabla\times i=0$

$$\vec{\nabla}\vec{A}\vec{B}\,ij=\left(\vec{A}\vec{B}i.\vec{\nabla}\right)i+(ixixi.\nabla)i+\left(iixi.\vec{\nabla}\right)\vec{B}+\left(Bii.\vec{\nabla}\right)\vec{A}+\vec{A}\vec{B}\,i\times\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{D}}+(i\vec{A}\vec{B}\times\vec{\nabla}\times i+ii\vec{A}\times\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{B}}+(Bii)\times\vec{\nabla}\times\vec{\mathrm{A}}$$

نکته:

$$\begin{vmatrix} i & j & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial_x} & \frac{\partial}{\partial_y} & \frac{\partial}{\partial_z} \\ i & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(A.\nabla)B+(B.\nabla)\vec{A}+\vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)+\vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$$

بحث و نتیجه گیری

فصلنامه علمی تخصصی ایده های نو در علوم، مهندسی و فناوری ، دوره ۲، شماره۲، تابستان ۱۳۹۷، ص ۴۱-۳۳
ISSN: 2588-3984
http://www.Tajournals.com

با استفاده از روش اثبات در منبع [1]، اثر گرادیان بر حاصل ضرب داخلی دو بردار در فضای دو بعدی را به حالت حاصل ضرب داخلی n بردار در فضای n– بعدی تعمیم دادیم.

منابع

[1] G. B. Arfken, H. J. Weber, F. E. Harris, Mathematical Methods for Physicists, Seventh Edition: A Comprehensive Guide, Academic Press, 2012.
[2] G. B. Arfken, H. J. Weber, F. E. Harris, Essential Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, 2003.